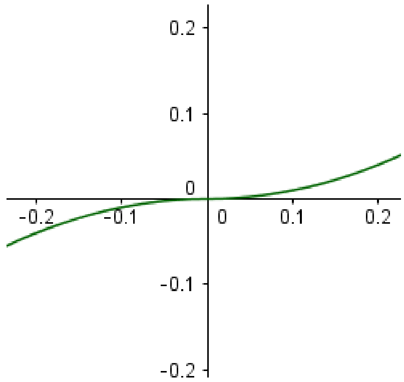
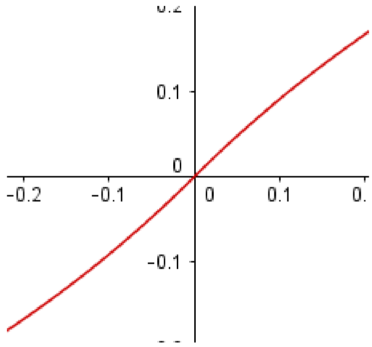
Exercice 1:

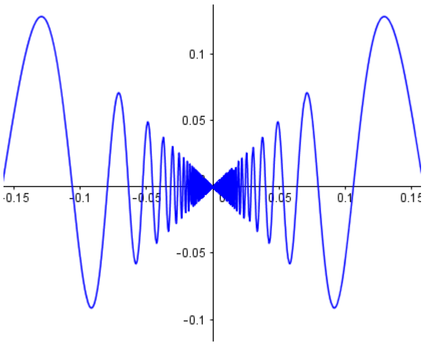
1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. Le seul point à regarder en détail est 0.
   Soit $x \neq 0$.
   $$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = |x| \text{ et } \lim_{x\to 0} |x| = 0$$
   On en déduit que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.



2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas. Le seul point à étudier en détail est 0.
   Soit $x \neq 0$.
   $$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{1}{|x|+1} \text{ et } \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|+1} = 1$$
   On en déduit que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = 1$.



3. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$. La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition, la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Par produit, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Le seul point à regarder en détail est 0.
   Soit $x \neq 0$.
   $$\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
   Or, la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$ donc h n'est pas dérivable en 0.

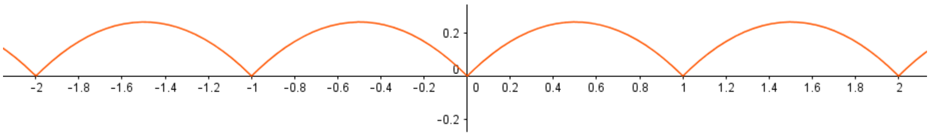


Exercice 2:

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

   $f(x+1) = x+1-\lfloor x+1 \rfloor - (x+1-\lfloor x+1 \rfloor)^2 = x+1-\lfloor x \rfloor - 1 - (x+1-\lfloor x \rfloor - 1)^2 = x - \lfloor x \rfloor - (x-\lfloor x \rfloor)^2$

   Donc, f est 1-périodique. On va pouvoir restreindre son étude à $[0;1[$.

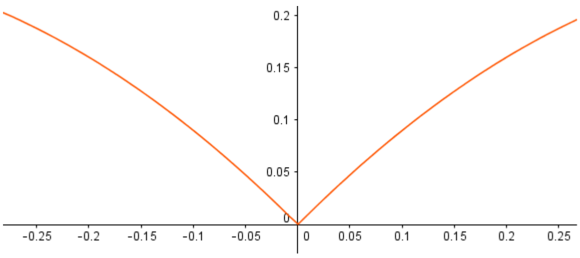


2. Continuité en 0:
   $f(0) = 0$.
   Soit $x \in]0;1[$. $f(x) = x - \lfloor x \rfloor - (x - \lfloor x \rfloor)^2 = x - x^2$ car $\lfloor x \rfloor = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$
   Soit $x \in [-1;0[$. $f(x) = x - \lfloor x \rfloor - (x - \lfloor x \rfloor)^2 = x+1-(x+1)^2 = x(x+1)$ car $\lfloor x \rfloor = -1$ donc $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$
   Donc, f est continue en 0.

   Dérivabilité en 0:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x \to 0^+} (1-x) = 1 \\
\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} -x = -1
\end{aligned}$$

   La fonction f n'est pas dérivable en 0.



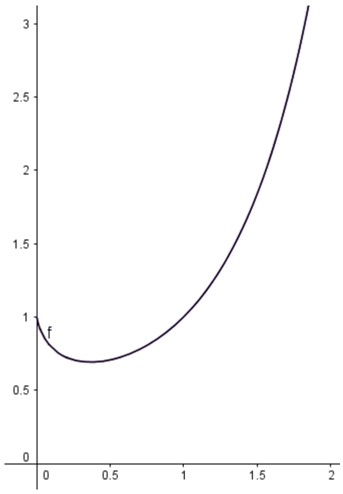
3. La fonction f est continue sur $[0;1[$ et continue également en 1. Par périodicité, elle l'est sur $\mathbb{R}$.

   La fonction f est dérivable sur $]0;1[$ et pas en 0. Par périodicité, elle l'est sur tous les intervalles de la forme $]n;n+1[$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
   La fonction f n'est pas dérivable en 0 donc par périodicité, elle n'est pas dérivable sur $\mathbb{Z}$.
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.

Exercice 3:

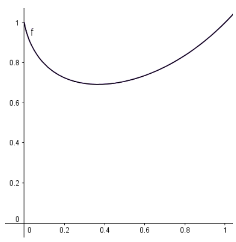
1. f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \exp(x\ln(x))$.
   La fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction $x \mapsto x\ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$.
   La fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$. Par composition, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Etude en 0
   $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \exp(x\ln(x)) = 1$. La fonction f est donc prolongeable en 0 en posant $f(0) = 1$.



2. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction $x \mapsto x\ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.
   La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = (\ln(x)+1)\exp(x\ln(x))$$

3. On va déterminer la limite du taux d'accroissement en 0. Soit $x \in]0;1[$.
   $$\frac{x^x - 1}{x - 0} = \frac{\mathbf{e}^{x\ln(x)} - 1}{x} = \frac{\mathbf{e}^{x\ln(x)} - 1}{x\ln(x) - 0}\ln(x)$$
   Or, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{u\to 0} \frac{\mathbf{e}^{u}-1}{u} = \mathbf{e}^0 = 1$. Donc, la fonction f n'est pas dérivable en 0 et admet une tangente verticale.



Exercice 4: La fonction ln et la fonction carré sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonction qui le sont.
La fonction nulle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$ donc la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \begin{cases} 2x\ln(x) + x \text{ pour } x > 0 \\ 0 \text{ pour } x < 0 \end{cases}$$

Continuité en 0
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ par croissance comparée.
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$. Donc, la fonction f est continue en 0.

Dérivabilité en 0
$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)=0$.
$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$. Donc, la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.

Continuité de la dérivée en 0
$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x\ln(x)+x)=0=f'(0)$
$\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=0=f'(0)$. Donc, la fonction f' est continue en 0 donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5: La fonction $x\mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, car quotient de fonction de classe $\mathscr{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
De plus, elle est à valeur dans $]0,1]$ et plus précisément, 1 admet un unique antécédent qui est 0.
Or Arccos est de classe sur $]-1;1[$. Par composition de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
Il reste à étudier la dérivabilité en 0.
Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$,

$$f'(x)=-\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)}\times\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}}}=\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)\sqrt{\operatorname{ch}^2(x)-1}}=\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)|\operatorname{sh}(x)|}=\frac{\operatorname{sgn}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$$

On a $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=-1$ D'après le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0)=-1$.
On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=1$ D'après le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=1$.
Les dérivées à gauche et à droite ne coïncident pas. Donc f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 6:

1. La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Donc, par composition, la fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x\in\mathbb{R},\ f_1'(x)=\mathbf{e}^x\mathbf{e}^{\mathbf{e}^x}=\mathbf{e}^{x+\mathbf{e}^x}$$

2. La fonction f_2 est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f_2(x)=\exp(\frac{1}{x}\ln(x))$.
La fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, par produit, la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}\ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition, la fonction f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f'(x)=\left(\frac{-\ln(x)}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)\exp\left(\frac{1}{x}\ln(x)\right)=\frac{1-\ln(x)}{x^2}x^{\frac{1}{x}}$$

3. La fonction f_3 peut s'écrire $f:x\mapsto\ln\left(1-\frac{2}{x+1}\right)$. La fonction $x\mapsto 1-\frac{2}{x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ comme quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule pas.
De plus, $1-\frac{2}{x+1}>0$ si et seulement si $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.
La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, la fonction f_3 est dérivable sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ et
$$\forall x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[,\ f_3'(x)=\frac{\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{2}{(x+1)(x-1)}=\frac{2}{x^2-1}$$

4. La fonction $x \mapsto 1+x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[1;+\infty[$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[1;+\infty[$.
   La fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ est dérivable sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$. Par composition, la fonction f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (on enlève 0 qui est l'antécédent de 1) et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_4'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}.\frac{2}{x^2} = \frac{2}{x\sqrt{1+x^2}}$$

5. La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition, la fonction f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_5'(x) = \mathrm{sh}'(x).\frac{1}{1+\mathrm{sh}^2(x)} = \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$$

6. La fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x) - \cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
   La fonction $x \mapsto \mathrm{sh}(x) + \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Cherchons les points où cette fonction s'annule.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\mathrm{sh}(x) + \sin(x))' = \mathrm{ch}(x) + \cos(x)$$

   La dérivée est positive sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en 0 donc la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et elle ne s'annule qu'en 0.

   Finalement, la fonction f_6 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas et

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_6'(x) &= \frac{(\mathrm{sh}(x)+\sin(x))^2 - (\mathrm{ch}(x)-\cos(x))(\mathrm{ch}(x)+\cos(x))}{(\mathrm{sh}(x)+\sin(x))^2} \\ &= \frac{\mathrm{sh}^2(x) + 2\mathrm{sh}(x)\sin(x) + \sin^2(x) - \mathrm{ch}^2(x) + \cos^2(x)}{(\mathrm{sh}(x)+\sin(x))^2} = \frac{2\mathrm{sh}(x)\sin(x)}{(\mathrm{sh}(x)+\sin(x))^2}\end{aligned}$$

<u>Exercice 7</u>:

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$.

2. La fonction $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto \mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\},\ \left(t \mapsto \mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{t+1}\right)\right)'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2}.\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+x^2} = \frac{1}{(x+1)^2+x^2}$$

   La fonction $x \mapsto \frac{x}{x-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto \mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{x-1}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ \left(t \mapsto \mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{t-1}\right)\right)'(x) = \frac{x-1-x}{(x-1)^2}.\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+x^2} = \frac{-1}{(x-1)^2+x^2}$$

   La fonction $x \mapsto \frac{1}{2x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \left(t \mapsto \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2t^2}\right)\right)'(x) = \frac{-4x}{4x^4}.\frac{4x^4}{4x^4+1} = \frac{-4x}{4x^4+1}$$

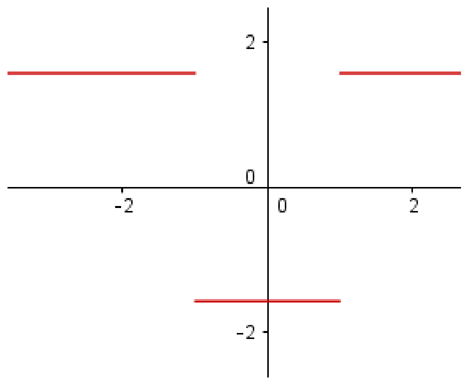
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ comme somme de fonction dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{(x+1)^2+x^2} + \frac{-1}{(x-1)^2+x^2} + \frac{4x}{4x^4+1}\\
&= \frac{((x-1)^2+x^2)(4x^4+1) - ((x+1)^2+x^2)(4x^4+1) + 4x((x+1)^2+x^2)((x-1)^2+x^2)}{((x+1)^2+x^2)((x-1)^2+x^2)(4x^4+1)}\\
&= \frac{(2x^2-2x+1)(4x^4+1) - (2x^2+2x+1)(4x^4+1) + 4x(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)}{((x+1)^2+x^2)((x-1)^2+x^2)(4x^4+1)}\\
&= \frac{-4x(4x^4+1) + 4x((2x^2+1)^2-4x^2)}{((x+1)^2+x^2)((x-1)^2+x^2)(4x^4+1)}\\
&= \frac{-4x((4x^4+1) - (2x^2+1)^2+4x^2)}{((x+1)^2+x^2)((x-1)^2+x^2)(4x^4+1)}\\
f'(x) &= 0
\end{aligned}$$

3. La fonction f est constante par morceaux sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\},\ f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ pour } x < -1\\ -\frac{\pi}{2} \text{ pour } -1 < x < 0\\ -\frac{\pi}{2} \text{ pour } 0 < x < 1\\ \frac{\pi}{2} \text{ pour } x > 1 \end{cases}$$



Exercice 8: Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Posons $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a+b+c)x$.
Cette fonction est continue sur $[0;1]$, dérivable sur $]0;1[$ et $f(0) = f(1)$.
Par le théorème de Rolle, $\exists x \in]0;1[$ tel que $f'(x) = 0$.
Donc, $\exists x \in]0;1[,\ 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a+b+c) = 0 \Rightarrow \exists x \in]0;1[,\ 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a+b+c$.

Exercice 9: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
On suppose que f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Supposons que f est périodique, de période T.
La fonction f est continue sur $[0;T]$, dérivable sur $]0;T[$ et $f(0) = f(T)$.
Par le théorème de Rolle, $\exists c \in]0,T[,\ f'(c) = 0$. C'est absurde. Donc f n'est pas périodique.

Exercice 10: [*] *Théorème de Rolle généralisé*
Si f est une fonction constante alors on a le résultat. Supposons que f ne soit pas une fonction constante. Donc, $\exists a \in]0;+\infty[$ tel que $f(a) \neq f(0)$. On suppose $f(a) > f(0)$.

1. Par le TVI appliqué à la fonction f sur le segment $[0;a]$, on a : $\exists c \in]0;a[,\ f(c) = \dfrac{f(0)+f(a)}{2}$.

2. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(0) < f(a)$, par écriture de la limite, on obtient que : $\exists d \in]a;\infty[,\ f(d) \leqslant \dfrac{f(0)+f(a)}{2}$.

   Par le TVI appliqué à la fonction f sur le segment $[a;d]$, on a : $\exists \tilde{c} \in]a;d[,\ f(\tilde{c}) = \dfrac{f(0)+f(a)}{2}$.

On applique le théorème de Rolle à la fonction f sur le segment $[c;\tilde{c}]$. Donc, $\exists x \in]c;\tilde{c}[$ tel que $f'(x) = 0$.

<u>Exercice 11:</u> Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f : y \mapsto y\mathbf{e}^{\frac{1}{y}}$ est continue sur $[x;x+1]$, dérivable sur $]x;x+1[$. D'après l'EAF, $\exists c_x \in]x;x+1[,\ \frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x} = f'(c_x)$.

Or, $f'(c_x) = (1-\frac{1}{c_x})\mathbf{e}^{\frac{1}{c_x}} = \frac{c_x-1}{c_x}\mathbf{e}^{\frac{1}{c_x}}$. Donc,

$$\exists c_x \in]x;x+1[,\ \left((x+1)\mathbf{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\mathbf{e}^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{c_x-1}{c_x}\mathbf{e}^{\frac{1}{c_x}}$$

Passons à la limite.

$$\lim_{x\to+\infty} c_x = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{c_x-1}{c_x} = 1 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \mathbf{e}^{\frac{1}{c_x}} = 1.$$

Par produit,

$$\lim_{x\to+\infty} \left((x+1)\mathbf{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\mathbf{e}^{\frac{1}{x}}\right) = 1.$$

<u>Exercice 12:</u> On s'intéresse, pour $n \in \mathbb{N}^*$, à la somme $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[n;n+1]$, dérivable sur $]n;n+1[$.

   D'après l'EAF, $\exists c \in]n;n+1[$ tel que $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n} = \dfrac{1}{2\sqrt{c}}$.

   Or, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ est décroissante sur $[n;n+1]$ donc $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{c}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ donc

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

2. En faisant un décalage d'indice on obtient que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On va somme les inégalités précédentes pour $k \in [1;n]$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{k+1}-\sqrt{k} &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{k}} \leqslant \sqrt{k}-\sqrt{k-1} \\
\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right) \\
2\sqrt{n+1}-2 &\leqslant S_n \leqslant 2\sqrt{n}
\end{aligned}$$

4. On repart de l'encadrement précédent.

$$\begin{aligned}
2\sqrt{n+1}-2 &\leqslant S_n \leqslant 2\sqrt{n} \\
\frac{2\sqrt{n+1}-2}{2\sqrt{n}} &\leqslant \frac{S_n}{2\sqrt{n}} \leqslant 1
\end{aligned}$$

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\sqrt{n+1}-2}{2\sqrt{n}} = 1$. Par le théorème d'encadrement, $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

   On obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

   (*On dit que la série* $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ *diverge*).

Exercice 13:
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et périodique. Donc il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.
On utilise l'inégalité de convexité entre 0 et T.
Pour tout $\lambda \in [0,1]$, $f((1-\lambda)\times 0 + \lambda T) \leqslant \lambda f(T) + (1-\lambda)f(0)$ i.e. $f(\lambda T) \leqslant f(0)$.
Soit $x \in [0, T[$. Pour $\lambda = \frac{x}{T} \in [0,1]$, $f(x) \leqslant f(0)$.
On utilise à présent l'inégalité de convexité entre $x - T$ et x.
Pour tout $\lambda \in [0,1]$, $f((1-\lambda)\times x + \lambda(x-T)) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x-T)$ i.e. $f(x - \lambda T) \leqslant f(x)$.
Pour $\lambda = \frac{x}{T} \in [0,1]$, on obtient $f(0) \leqslant f(x)$.
Conclusion, pour tout $x \in [0, T[$, $f(x) = f(0)$ donc f est constante sur $[0, T[$, donc constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14:
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe.
Soit $a \in \mathbb{R}$. On va montrer que f est continue à droite en a. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < a < y$. D'après l'inégalité des pentes, pour tout $z \in]a, y[$:

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leqslant \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \leqslant \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$$

D'où

$$(z-a)\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leqslant f(z)-f(a) \leqslant (z-a)\frac{f(y)-f(a)}{y-a}$$

En passant à la limite lorsque z tend vers a par valeur supérieure, on obtient par encadrement, $f(z) \underset{z\to a^+}{\longrightarrow} f(a)$.
La démonstration de la continuité à gauche est analogue.
Attention, le résultat ne persiste pas lorsque $f : [0;1] \to \mathbb{R}$.
Contre-exemple : $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que f est nulle sur $]0;1[$ et $f(0) = f(1) = 1$.

Exercice 15: La fonction $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$ est définie et deux fois dérivables sur $]1; +\infty[$.
On a $f' : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ et $f'' : x \mapsto -\frac{\ln(x)+1}{(x\ln(x))^2}$. Cette dernière étant négative, f est donc concave.
On en déduit que pour tout $x, y \in]1; +\infty[$, $\ln\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(\ln(\ln(x)) + \ln(\ln(y))\right) = \ln\left(\sqrt{\ln(x)\ln(y)}\right)$.
En passant à l'exponentielle, on obtient

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$$

Exercice 16: Soit (u_n) suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n+1}{u_n+2}\,.$$

Posons $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \frac{x+1}{x+2} \end{cases}$. Recherche d'un point fixe $l \in \mathbb{R}_+$ de f:

$$l = f(l) \iff l^2 + l - 1 = 0 \iff l = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \iff l = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Posons $l = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
On a que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$. D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$.
D'après l'inégalité des accroissements finis, f est $\frac{1}{4}$-lipschitzienne. D'où

$$\forall n \geqslant 1,\ |u_n - l| = |f(u_{n-1}) - f(l)| \leqslant \frac{1}{4}|u_{n-1} - l| \leqslant \frac{1}{4^n}|u_0 - l|$$

D'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} l = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 17:

1. Les fonctions $x \mapsto x^2+1$ et exp sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, d'après la formule de Leibniz,

$$\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N},\ f_1^{(n)} & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x \mapsto x^2+1)^{(k)} (x \mapsto \mathbf{e}^x)^{(n-k)} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_1^{(n)}(x) & = & (x^2+1)\mathbf{e}^x + n.2x.\mathbf{e}^x + \dfrac{n(n-1)}{2}.2\mathbf{e}^x \\ & = & (x^2+2nx+n^2-n+1)\mathbf{e}^x \end{array}$$

2. Les fonctions $x \to (1+x)^n$ et $x \mapsto x^2$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par produit, f_2 de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par la formule de Leibniz,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_2^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x \mapsto x^2)^{(k)} (x \mapsto 1+x^n)^{(n-k)}$$

Calculons les dérivées k-èmes des deux fonctions

$$\begin{array}{rcl} \forall k \geqslant 3,\ (x \mapsto x^2)^{(k)} & = & 0 \\ \forall k \geqslant n+1,\ (x \mapsto (1+x)^n)^{(k)} & = & 0 \\ \forall k \leqslant n,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (x \mapsto (1+x)^n)^{(k)}(x) & = & n(n-1)...(n-k+1)(1+x)^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}(1+x)^{n-k} \end{array}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_2^{(n)}(x) = n!.x^2 + n.2x.n!(1+x) + \frac{n(n-1)}{2}.2.\frac{n!}{2}(1+x)^2$$

3. On linéarise la fonction f_3 (qui est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$).

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in \mathbb{R}, \cos^3(x) & = & \left(\dfrac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}x}+\mathbf{e}^{-\mathbf{i}x}}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{4}(\cos(3x)+3\cos(x)) \\ \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_3^{(k)}(x) & = & \dfrac{1}{4}((x \mapsto \cos(3x))^{(k)}(x) + 3\cos^{(k)}(x)) = \dfrac{1}{4}\left(3^k \cos\left(3x+\dfrac{k\pi}{2}\right) + 3\cos\left(x+\dfrac{k\pi}{2}\right)\right) \end{array}$$

4. On démontre par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N},\ f_3$ est $\mathscr{C}^k$ et $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\},\ f_4^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$

5. On démontre par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N},\ f_4$ est $\mathscr{C}^k$ et $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\},\ f_5^{(k)}(x) = (-1)^k \dfrac{k!}{(1+x)^{k+1}}$

6. On remarque que $f_6 = f_4.f_5$. D'où f_6 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$. On peut donc appliquer la formule de Leibniz.

$$\begin{aligned}
\forall k\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-1;1\},\ f_6^{(k)}(x) &= \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}f_4^{(l)}(x).f_5^{(k-l)}(x)\\
&= \sum_{l=0}^{k}\frac{k!}{l!(k-l)!}.\frac{l!}{(1-x)^{l+1}}.(-1)^{k-l}\frac{(k-l)!}{(1+x)^{k-l+1}}\\
&= \frac{k!(-1)^k}{(1+x)^{k+1}(1-x)}\sum_{l=0}^{k}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^l\\
&= \frac{k!(-1)^k}{(1+x)^{k+1}(1-x)}\left(\frac{1-\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{k+1}}{1-\frac{x+1}{x-1}}\right)\\
&= \frac{k!(-1)^k}{(1+x)^{k+1}}\left(\frac{1-\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{k+1}}{1-x+x+1}\right)\\
&= \frac{k!(-1)^k}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{k+1}}{(1+x)^{k+1}}\right)=\frac{k!(-1)^k}{2}\left(\frac{1}{(1+x)^{k+1}}-\frac{1}{(x-1)^{k+1}}\right)\\
&= \frac{k!}{2}\left(\frac{(-1)^k}{(1+x)^{k+1}}+\frac{1}{(1-x)^{k+1}}\right)=\frac{1}{2}\left(f_4^{(k)}(x)+f_5^{(k)}(x)\right)
\end{aligned}$$

Exercice 18:

1. Soit $f : x\mapsto x^{2n}$. La fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   On peut démontrer par récurrence que $\forall k\in\{0;...;2n\},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f^{(k)}(x)=\dfrac{(2n)!}{(2n-k)!}x^{2n-k}$.

   En remarquant que $x^{2n}=x^n.x^n$, on peut appliquer la formule de Leibniz.

$$\begin{aligned}
\forall k\in\{0;...;2n\},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f^{(k)}(x) &= \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}(x\mapsto x^n)^{(l)}(x)(x\mapsto x^n)^{(k-l)}(x)\\
&= \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\frac{n!}{(n-l)!}x^{n-l}\frac{n!}{(n-(k-l))!}x^{n-(k-l)}\\
&= \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\frac{(n!)^2}{(n-l)!(n-k+l)!}x^{2n-k}
\end{aligned}$$

2. On applique les deux formules précédentes pour $k=n$.

$$\begin{aligned}
\frac{(2n)!}{(2n-n)!}x^{2n-n} &= \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\frac{(n!)^2}{(n-l)!(n-n+l)!}x^{2n-n}\\
\frac{(2n)!}{n!}x^n &= \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}^2.n!.x^n\\
\frac{(2n)!}{(n!)^2} &= \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}^2\\
\binom{2n}{n} &= \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}^2
\end{aligned}$$

<u>Exercice</u> <u>19:</u> La fonction h est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$. De plus, la fonction h est paire, elle a donc la même régularité en 1 et en -1.
Étudions la régularité de h en 1 :
$\forall t \in [-1;1]$, $h(t) = 1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6 \underset{t\to 1^-}{\longrightarrow} 0 = h(1)$ et $\forall t \in]1;+\infty[$, $h(t) = 0 \underset{t\to 1^+}{\longrightarrow} 0 = h(1)$ donc h est continue en 1.
$\forall t \in [-1;1]$, $h'(t) = -6t + 12t^3 - 6t^5 \underset{t\to 1^-}{\longrightarrow} 0$ et $\forall t \in]1;+\infty[$, $h'(t) = 0 \underset{t\to 1^+}{\longrightarrow} 0$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, h est dérivable en 1 et $h'(1) = 0$.
$\forall t \in [-1;1]$, $h''(t) = -6 + 36t^2 - 30t^4 \underset{t\to 1^-}{\longrightarrow} 0$ et $\forall t \in]1;+\infty[$, $h''(t) = 0 \underset{t\to 1^+}{\longrightarrow} 0$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, h' est dérivable en 1 et $h''(1) = 0$.
$\forall t \in [-1;1]$, $h^{(3)}(t) = 72t - 120t^3 \underset{t\to 1^-}{\longrightarrow} -48$ et $\forall t \in]1;+\infty[$, $h^{(3)}(t) = 0 \underset{t\to 1^+}{\longrightarrow} 0$. Donc même, si $h^{(3)}(1)$ existait, $h^{(3)}$ ne serait pas continue en 1.
Donc h est de classe $\mathscr{C}^2$ mais n'est pas de classe $\mathscr{C}^3$.

<u>Exercice</u> <u>20:</u> Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Considérons la fonction h sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} x^3 \text{ si } x < 1 \\ a + bx + cx^2 \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

La fonction h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
$\forall x \in]-\infty;1[$,
$h(x) = x^3 \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 1$
$h'(x) = 3x^2 \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 3$
$h''(x) = 6x \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 6$
$h^{(3)}(x) = 6 \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 6$
$\forall x \in]1;+\infty[$,
$h(x) = a + bx + cx^2 \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} a + b + c$
$h'(x) = b + 2cx \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} b + 2c$
$h''(x) = 2c \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 2c$
$h^{(3)}(x) = 0 \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 0$
Même si $h^{(3)}(1)$ existait, $h^{(3)}$ ne serait pas continue en 1.
Donc h n'est pas de classe $\mathscr{C}^k$ pour $k \geqslant 3$.
h est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R} \iff a + b + c = 1$
h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \iff a + b + c = 1$ et $b + 2c = 3 \iff a = c - 2$ et $b = -2c + 3$
h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R} \iff a + b + c = 1$, $b + 2c = 3$ et $2c = 6 \iff a = 1$, $b = -3$ et $c = 3$